

线性规划课程实验报告

实验名称 单纯形算法和对偶单纯形算法

班级	数学类 2203 班	学号	220221100327	姓名	徐梓乔	序号	80
任课教师	刘敬刚	实验地点	数学实验中心	评分			

一、实验目的

1. 掌握线性规划的数学模型及其标准型；
2. 掌握求解线性规划的单纯形算法；
3. 掌握求解线性规划的人工变量法；
4. 掌握求解线性规划的对偶单纯形算法；
5. 掌握线性规划的灵敏度分析方法。

二、实验要求和结果

1. 设计并编写**单纯形算法**的程序，具体要求为：
 - (1) **明确问题**：写出所编程序能够求解的线性规划问题的**数学模型及必要的限制条件**；
 - (2) **确定计算过程**：画出流程图或者写出算法描述；
 - (3) **算例检验**：给出**至少两个**具有代表性的**计算实例**，通过程序运行出结果并进行结果分析。

实验过程及相关结果如下：

(1).数学模型及必要限制条件：

$$\begin{aligned} \max(\min) z &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \begin{cases} Ax \leq (\geq, =) b \\ x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n \end{cases} \\ b &\geq 0 \end{aligned}$$

(2).计算过程：

①确定一个基可行解：

加入松弛变量化建立的数学模型为标准型，将方程组写成 $Ax=b$ 的形式，然后从 A 中找出一个单位矩阵，这个单位矩阵就先作为初始基矩阵，对应的解也就是基可行解。一般可以直接选取松弛变量的系数向量作为单位矩阵（初始矩阵）。

②最优性检验:

首先选取基变量对应位置的 c 数组值 (目标函数中基变量的系数), 然后对每一个变量 x_i 代

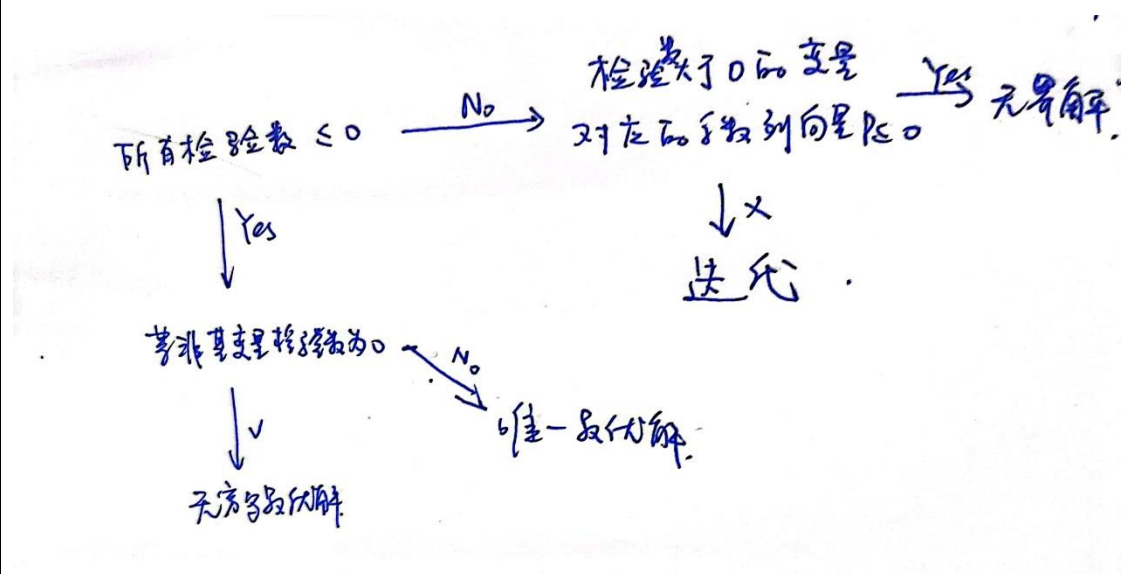
入公式计算 $c_i - \sum_{j=1}^m cb_j \times A_{ji}$ 作为该变量的检验数, m 为基变量的个数, 即 cb 数组的长度,

如果所有的检验数都小于或等于 0, 则进行下一步; 否则, 进入迭代运算。

③迭代运算:

开始迭代运算之前, 要先检测检验数是否有一个大于 0, 且其对应的 A 矩阵中的列向量元素全部非正数, 若是, 则有无界解, 停止计算。

具体流程图:



(3).算例检验:

①唯一最优解:

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

运行程序:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = [40 \quad 30]$$

$$c = [3 \quad 4 \quad 0 \quad 0]$$

得到最优解: $X^* = [18 \ 4 \ 0 \ 0]$;

目标函数最优值 $Z^* = 70$;

迭代次数: 3

②无穷最优解:

$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = [8 \quad 16 \quad 12]$$

$$c = [2 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

结果: 无穷多最优解, 程序给出一个解, 最优目标函数值为 16, 迭代次数为 2

2. 设计并编写对偶单纯形算法的程序, 具体要求为:

(1) **明确问题:** 写出所编程序能够求解的线性规划问

题的**数学模型**及**必要的限制条件**;

(2) **确定计算过程:** 画出流程图或者写出算法描述;

(3) **算例检验:** 给出**至少两个**具有代表性的**计算实例**, 通过程序运行出结果并进行结果分析.

实验过程及相关结果如下:

(1) 数学模型及限制条件:

$$\max(\min) z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\begin{cases} Ax \leq (\geq, =) b \\ x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

(2) 计算过程:

①对线性规划问题进行变换,使列出的初始单纯形表中所有检验数 ≤ 0 ,对目标函数型为 \max 型化为 \min 型。

②最优性检验

检查 b 列的数字,若都非负,检验数都为非正,则已得到最优解。停止计算。若 b 中至少还有一个负分量,检验数保持非正,则进入迭代运算。

③迭代运算:

确定换出变量:按 $\min_i [(B^{-1}b)_i | (B^{-1}b)_i < 0] = (B^{-1}b)_l$ 对应的基变量 x_l 为换出变量。

确定换入变量:在单纯型表中检查 x_l 所在行的系数 $\alpha_{lj} (j=1, 2, \dots, n)$ 。若所有 $\alpha_{lj} \geq 0$, 则无可行解, 停止计算。若存在 $\alpha_{lj} < 0 (j=1, 2, \dots, n)$, 计算

$$\theta_k = \min \left(\theta_j = \frac{\sigma_j}{\alpha_{lj}} | \alpha_{lj} < 0, j=1, 2, \dots, n \right)$$

按 θ 规则所对应的列的非基变量 x_k 为换入变量。

量。

之后按单纯形法在表中进行迭代。

(3) 算法检验:

①有最优解:

$$\max z = 2x_1 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0, (i=1, 2, \dots, 5) \end{cases}$$

运行代码

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = [8 \quad 16 \quad 12]$$

$$c = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

得到最优解： $X^* = [4 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 4]$

目标函数最优值 $Z^* = 14$;

迭代次数：3

3. 应用一建立模型并应用所编程序求解如下问题.

已知某工厂计划生产 I、II、III 三种产品，各产品需要在 A、B、C 设备上加工，有关数据见表 1. 试回答：

- (1) 如何充分发挥设备能力，使生产赢利最大？
- (2) 若为了增加产量，可借用其他工厂的设备 B，每月可借用 60 台时，租金为 **1.8 万元**，问借用 B 设备是否合算？
- (3) 若另有两种新产品 IV、V，其中 IV 需用设备 A—12 台时，B—5 台时，C—10 台时，单位产品赢利 2.1 千元；新产品 V 需用设备 A—4 台时，B—4 台时，C—12 台时，单位产品赢利 1.87 千元。如 A、B、C 设备台时不增加，**分别回答**这两种新产品投产在经济上是否合算？
- (4) 对产品工艺重新进行设计，改进结构。改进后生产每件产品 I，需用设备 A—9 台时，设备 B—12 台时，设备 C—4 台时，单位产品赢利 4.5 千元，问这对原计划有何影响？

表 1 数据表

设备代号	I	II	III	设备有效台时/月
A	8	2	10	300
B	10	5	8	400
C	2	13	10	420
单位产品利润/千元	3	2	2.9	

(1) 设生产 I、II、III 产品的数量分别为 x_1, x_2, x_3 (件), 利润为 z (千元), 得数学模型:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 2.9x_3$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 300 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 400 \\ 2x_1 + 13x_2 + 10x_3 \leq 420 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

加入松弛变量 x_4, x_5, x_6 后, 将该模型化为标准型:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 2.9x_3$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 10x_3 + x_4 = 300 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_5 = 400 \\ 2x_1 + 13x_2 + 10x_3 + x_6 = 420 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6 \end{cases}$$

则系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 13 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 限制条件的列向量为 $b = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 420 \end{bmatrix}$, 目标函数各变量系数数组

$c = [3 \ 2 \ 2.9 \ 0 \ 0 \ 0]$, 代入程序, 得:

最优解 $X^* = [22.5333 \ 23.2 \ 7.3333 \ 0 \ 0 \ 0]$

最优目标函数值 $Z^* = 135.2667$

迭代次数: 4

所以最终经过取整后, I 产品生产 23 件, II 产品 23 件, III 产品 7 件, 最高利润为 135.3 千元。

(2) 由程序运算结果得到的最终检验数可知: B 的影子价格为 0.2667 千元/台时。

借用设备租金: $18(\text{千元}) \div 60(\text{台时}) = 0.3(\text{千元/台时})$

因为 $0.3 > 0.2667$, 所以租借设备 B 不划算。

答: 租借设备 B 不合算。

(3) 设设备 I、II、III、IV 加工 x_1, x_2, x_3, x_4 件, 利润 z 千元, 建立如下数学模型;

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 2.9x_3 + 2.1x_4$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 12x_4 \leq 300 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 \leq 400 \\ 2x_1 + 13x_2 + 10x_3 + 10x_4 \leq 420 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

添加松弛变量 x_5 、 x_6 、 x_7 后化为标准型：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 2.9x_3 + 2.1x_4$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 12x_4 + x_5 = 300 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 + x_6 = 400 \\ 2x_1 + 13x_2 + 10x_3 + 10x_4 + x_7 = 420 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

运行程序：

得最优解 [22.5333 23.2000 7.3333 0 0 0 0]

目标函数取值为 135.2667，未发生改变，所以投资设备 IV 不划算。

设设备 I、II、III、V 加工 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 件，利润 z 千元，

建立如下数学模型：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 2.9x_3 + 1.87x_4$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 \leq 300 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 \leq 400 \\ 2x_1 + 13x_2 + 10x_3 + 12x_4 \leq 420 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

添加松弛变量 x_5 、 x_6 、 x_7 后化为标准型：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 2.9x_3 + 1.87x_4$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 + x_5 = 300 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + x_6 = 400 \\ 2x_1 + 13x_2 + 10x_3 + 12x_4 + x_7 = 420 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

运行程序

得到最优解 [26.7500 15.5000 0 13.7500 0 0 0]

目标函数取值为 136.9625

因为 $136.9625 > 135.2667$, 所以投资设备 V 划算。

(4) 设生产 I、II、III 产品的数量分别为 x_1, x_2, x_3 (件), 利润为 z (千元), 得数学模型:

$$\max z = 4.5x_1 + 2x_2 + 2.9x_3$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 300 \\ 12x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 400 \\ 4x_1 + 13x_2 + 10x_3 \leq 420 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

加入松弛变量 x_4, x_5, x_6 后, 化该模型 标准型:

为

$$\max z = 4.5x_1 + 2x_2 + 2.9x_3$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + 10x_3 + x_4 = 300 \\ 12x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_5 = 400 \\ 4x_1 + 13x_2 + 10x_3 + x_6 = 420 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

运行程序

得到最优解 $[22.7941 \quad 25.2941 \quad 0 \quad 44.2647 \quad 0 \quad 0]$

目标函数取值为 153.1618

所以改变工艺后使利润变大了

三、思考题

1. (1) 写出线性规划数学模型的标准型；(2) 写出线性规划数学模型的三要素.

$$\begin{aligned} \max(\min) z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq, =) b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \leq (\geq, =) b_n \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

线性规划数学模型的三要素是：

- (1) 变量或决策变量
- (2) 目标函数
- (3) 约束条件

2. 线性规划的标准型中的目标函数最大化与目标函数最小化，对于单纯形算法的计算过程有何影响？

答：(1) 目标函数最大化：

确认换入变量时，在检验数大于 0 的决策变量中找寻最大检验数对应的变量；

判断解的情况时，决策变量的检验数均小于或等于 0 时，线性规划问题有最优值（若决策变量的检验数均小于 0，则有唯一最优解，否则，有无穷多最优解）。

(2) 目标函数最小化：

确认换入变量时，在检验数小于 0 的决策变量中找寻最小检验数对应的变量；

判断解的情况时，决策变量的检验数均大于或等于 0 时，线性规划问题有最优值（若决策变量的检验数均大于 0，则有唯一最优解，否则，有无穷多最优解）。

3. 简述松弛变量和人工变量的异同.

答：相同点：

- (1) 都为非负变量
- (2) 加入的目的都是构成一组初始基变量，获得初始单位阵

不同点：

- (1) 松弛变量的系数可以是 ± 1 ，但人工变量的系数必须为 +1
- (2) 松弛变量的加入是为了使约束条件变为等式，形成基矩阵；人工变量是在松弛变量加

入后但未形成基矩阵而加入的

(3) 松弛变量可能是初始基变量，人工变量一定是初始基变量

(4) 添加松弛变量前约束条件左右两式之间的符号为 $\leq, \geq, =$ ；而人工变量添加前约束条件均为等式

4. 简述影子价格的定义及其经济解释.

答：在线性规划问题的标准型中，某个约束条件的右端的 b_i 增加一个单位时，所引起目标函数最优值 z^* 的改变量，称为第 i 种资源的影子价格，其值等于对偶问题中最优取值 y_i^* 。

经济解释：

1. 影子价格是一种边际价格，边际价格是指在其他条件不变的情况下，单位资源数量的变化所引起的目标函数最优值的变换量。所以其实对偶变量的最优取值 y_i^* 就是第 i 种资源的边际价格。
2. 影子价格是一种机会成本，是在资源最优利用条件下对单位资源的估价，这种估价不是资源实际的市场价格。所以是一种机会成本。
3. 影子价格可以在资源利用中得到具体应用。

比如由互补松弛性定理：
$$\begin{cases} y_s^T x^* = 0 \\ x_s^T y^* = 0 \end{cases}$$
 可见在最优的生产方案下，若某种资源未得到充分

分利用，则影子价格为0；若某种资源已得到充分利用，则影子价格不为0。

4. 影子价格可对单纯形表计算进行解释（下面以最大值为例）

单纯形表中的检验数：
$$\sigma_j = c_j - c_B^T B^{-1} P_j = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$$
。其中， c_j 是该产品价格，

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ 是该产品的所消耗的资源影子价格的总和，即隐含成本。而对应结论即：

σ_j 大于 0，则安排生产

σ_j 小于 0，出售资源或安排其他生产。

四、实验的难点分析

简述实验过程中遇到的困难及解决办法：

1. 对检验数计算公式的矩阵表达形式不够了解，运用到代码编写时感觉非常困难；通过查阅资料和检验计算，掌握了公式。
2. 写完之后觉得是不是可以直接用程序实现标准型的转换，编写的代码只针对标准型模型进行运行。